کد فرم : **FR/FY/11**
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۲ –فنی (۵ گروه هماهنگ)** نیمسال (**اول**/دوم) **۹۲-۱۳۹۱** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۲/۱۰/۱۴** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

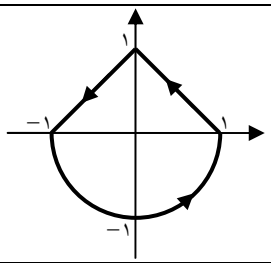
در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱- در ناحیه اول دستگاه مختصات، مکعب مستطیلی را در نظر بگیرید که یک راس آن نقطه M واقع بر صفحه $۲x+۳y+z=۱۶$ است و سه وجه آن که از نقطه M نمی گذرند، بر صفحات مختصات منطبق هستند. بیشترین حجم این مکعب مستطیل چقدر است ؟ **۱۵ نمره**

سوال۲- انتگرال منحنی‌الخط $\int_C ۳x^۲dx+\frac{z^۲}{y}dy+۲z\ln y dz$ را محاسبه کنید که در آن، C قسمتی از منحنی $r(t)=(\frac{۲-۲t}{t^۲+۱},\frac{۲}{t^۳+۱},\frac{۳t+۱}{t^۴+۱})$ و از نقطه $t=۰$ تا نقطه $t=۱$ است. **۱۵ نمره**

سوال۳- انتگرال دوگانه $\int_۰^۲\int_{y^۲}^۴ y\cos x^۲\, dx\, dy$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۴- انتگرال $\int_C \frac{(x+y)dx+(-x+y)dy}{x^۲+y^۲}$ را حل کنید که در آن، C مسیر نشان داده شده در شکل مقابل است و شامل دو پاره‌خط و یک نیمدایره می‌باشد. **۲۰ نمره**



سوال۵- انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۳x^۲}dx$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۶- حجم ناحیه محدود به استوانه $x^۲+y^۲=۱$ ، صفحه $z=۰$ و سهمیگون $z=۴+x^۲+y^۲$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۷- V ناحیه‌ای است که داخل مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و بین دو کره $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۹$ واقع شده‌است. اگر S سطح خارجی ناحیه V باشد و $\vec{F}=(x^۳,y^۳,z^۳)$ مطلوب است شار گذرنده از سطح S توسط میدان برداری $\vec{F}$. (یعنی انتگرال $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$) **۲۰ نمره**

موفق باشید

سوال۱- اگر (x,y,z) مختصات نقطه M باشد ، داریم $xyz>0$ و حجم مکعب مستطیل برابر است با $V=xyz$.
برای استفاده از روش ضرایب لاگرانژ تابع $f(x,y,z,\lambda)=xyz-\lambda(2x+3y+z-16)$ را در نظر می گیریم.
اکنون باید داشته باشیم $f_x=f_y=f_z=f_\lambda=0$ یعنی یک دستگاه ۴ معادله و ۴ مجهول خواهیم داشت.

$$f_x=yz-2\lambda=0\ ,\ \ f_y=xz-3\lambda=0\ ,\ \ f_z=xy-\lambda=0\ \ ,\ \ f_\lambda=-(2x+3y+z-16)=0$$

اکنون داریم $\lambda=xy=\frac{yz}{2}=\frac{xz}{3}$ یعنی $z=2x$ و $y=\frac{2}{3}x$

به کمک معادله صفحه داریم $2x+2x+2x=16$ یعنی $x=\frac{8}{3}\ ,\ y=\frac{16}{9}\ ,\ z=\frac{16}{3}$

بنابر این حجم مکعب مستطیل برابر است با : $V=\frac{2048}{81}$

سوال۲- قرار می‌دهیم $R=2z\ln y$, $Q=\frac{z^2}{y}$, $P=3x^2$ و مشاهده می‌کنیم که $P_y-Q_x=0\ ,\ P_z-R_x=0\ ,\ Q_z-R_y=0$
یعنی کرل تابع برداری (P,Q,R) برابر صفر و در نتیجه انتگرال مستقل از مسیر است. همچنین تابع f وجود دارد که $\nabla f=(P,Q,R)$ به سادگی دیده می‌شود که $f(x,y,z)=x^3+z^2\ln y$. ابتدای مسیر C نقطه $r(0)=(2,2,1)$ و نقطه انتهای آن $r(1)=(0,1,2)$
اکنون داریم :

$$\int_C 3x^2dx+\frac{z^2}{y}dy+2z\ln y dz=f(0,1,2)-f(2,2,1)=-(8+\ln 2)$$

سوال۳- برای حل این انتگرال باید ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم . داریم :

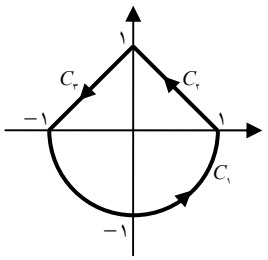
$$\int_{y=0}^{2}\int_{x=y^2}^{4} y\cos x^2\ dx\,dy=\int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{\sqrt{x}} y\cos x^2\ dy\,dx=\int_{x=0}^{4}\frac{1}{2}y^2\cos x^2\,\Big|_{y=0}^{\sqrt{x}}\ dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{4} x\cos x^2dx=\frac{1}{4}\sin x^2\,\Big|_{x=0}^{4}=\frac{1}{4}\sin 16$$

سوال۴- روش اول : می‌نویسیم $Q=\frac{-x+y}{x^2+y^2}$, $P=\frac{x+y}{x^2+y^2}$ آنگاه داریم $Q_x=\frac{x^2-2xy-y^2}{x^2+y^2}$, $P_y=\frac{x^2-2xy-y^2}{x^2+y^2}$
چون $P_y=Q_x$ طبق قضیه گرین مقدار انتگرال روی مسیر با مقدار آن روی هر مسیر دیگری مانند C' برابر است به شرط آنکه روی این دو مسیر و در ناحیه بین آنها توابع P,Q,P_y,Q_y پیوسته باشند. مسیر C' را دایره‌ای به شعاع دلخواه $a>0$ در نظر می گیریم. روی این مسیر داریم : $x=a\cos\theta\ ,\ y=a\sin\theta$ و $dx=-a\sin\theta\,d\theta\ ,\ dy=a\cos\theta\,d\theta$ و $x^2+y^2=a^2$

$$\int_{C'}\frac{(x+y)dx+(-x+y)dy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos\theta+a\sin\theta)(-a\sin\theta\,d\theta)+(-a\cos\theta+a\sin\theta)(a\cos\theta\,d\theta)}{a^2}=\int_0^{2\pi}(-1)\,d\theta=-2\pi$$

روش دوم : (حل مستقیم انتگرال بدون استفاده از قضیه گرین)



مسیر C را به سه مسیر ساده‌تر تقسیم می‌کنیم. مسیر C_1 نیمدایره $y=-\sqrt{1-x^2}$

$$J_1=\int_{C_1}\frac{(x+y)dx+(-x+y)dy}{x^2+y^2}=\int_{-1}^{1}\frac{(x-\sqrt{1-x^2})dx+(-x-\sqrt{1-x^2})\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx}{1}$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-Arc\sin x\,\Big|_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$$

مسیر C_2، پاره خط واقع در ناحیه اول یعنی $y=1-x$

$$J_2=\int_{C_2}\frac{(x+y)dx+(-x+y)dy}{x^2+y^2}=\int_1^0\frac{(x+1-x)dx+(-x+1-x)(-dx)}{x^2+(1-x)^2}$$

$$J_2=\int_1^0\frac{2x}{2x^2-2x+1}dx=\int_1^0\left(\frac{2x-1}{2x^2-2x+1}+\frac{1}{2x^2-2x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^0\frac{4x-2}{2x^2-2x+1}dx+\int_1^0\frac{2}{(2x-1)^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(2x^2-2x+1)+Arc\tan(2x-1)\Big|_1^0=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{2}$$

بطور مشابه ، روی مسیر C_3، پاره خط واقع در ناحیه دوم یعنی $y=1+x$ داریم : $J_3=\int_{C_3}\frac{(x+y)dx+(-x+y)dy}{x^2+y^2}=\frac{-\pi}{2}$

و بالاخره داریم : $\int_C\frac{(x+y)dx+(-x+y)dy}{x^2+y^2}=J_1+J_2+J_3=-2\pi$

سوال۵- اگر $I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3x^2}dx$ آنگاه انتگرال ناسره I همگراست و $0<I<3$. می توانیم بنویسیم $I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3y^2}dy$ و درنتیجه :

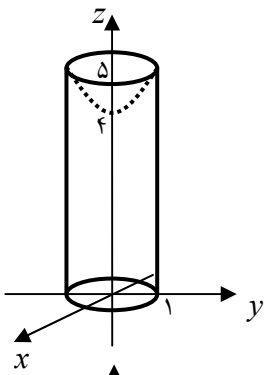
$$I^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3y^2}dy\right)$$

هر کدام از انتگرالها یک عدد ثابت هستند و می توانند وارد انتگرال دیگر شوند بنابر این داریم : $I^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3x^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3y^2}dy\right)dx$

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3x^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3y^2}dy\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3x^2}e^{-3y^2}dydx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3(x^2+y^2)}dydx$$

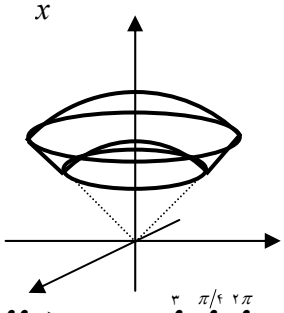
اکنون از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم : $I^2=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}re^{-3r^2}d\theta dr=2\pi\int_0^{\infty}re^{-3r^2}dr=\frac{-\pi}{3}e^{-3r^2}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{3}$

و در نهایت داریم : $I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3x^2}dx=\frac{\sqrt{3\pi}}{3}$



سوال۶- تصویر ناحیه مورد نظر بر روی صفحه xy دایره $x^2+y^2=1$ است. از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در مختصات استوانه‌ای معادله سهمیگون به صورت $z=4+r^2$ و معادله استوانه به صورت $r=1$ خواهد بود.

$$V=\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}(4+r^2)rd\theta dr=2\pi\int_{r=0}^{1}(4r+r^3)dr=2\pi\left[2r^2+\frac{1}{4}r^4\right]_0^1=\frac{9\pi}{2}$$



سوال۷- با توجه به شرایط مساله، می‌توان از قضیه واگرایی(دیورژانس) استفاده کرد.

$$\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_V div\vec{F}\,dV$$

با توجه به صورت مساله و ناحیه V، بهتر است که از مختصات کروی استفاده کنیم.

در مختصات کروی ، ناحیه داخل مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ به صورت $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$

و ناحیه بین دو کره به صورت $2\le\rho\le3$ نوشته می‌شود.

$$div\vec{F}=3(x^2+y^2+z^2)=3\rho^2\ ,\ dV=\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\int_{\rho=2}^{3}\int_{\varphi=0}^{\pi/4}\int_{\theta=0}^{2\pi}3\rho^4\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho=6\pi\int_{\rho=2}^{3}\int_{\varphi=0}^{\pi/4}\rho^4\sin\varphi\,d\varphi\,d\rho=6\pi\int_{\rho=2}^{3}\int_{\varphi=0}^{\pi/4}\rho^4[-\cos\varphi]_0^{\pi/4}\,d\varphi\,d\rho$$

$$=6\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_{\rho=2}^{3}\rho^4\,d\rho=3\pi(2-\sqrt{2})\times\frac{1}{5}(243-32)=\frac{633\pi}{5}(2-\sqrt{2})$$